CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA A VII-A, TULCEA, 1 aprilie 2017

Clasa a VIII – a

1. Se consideră o mulţime nevidă M de numere reale nenule cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y, z \in M$, avem $xy + yz + zx \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că, oricare ar fi $a, b \in M$, avem $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

2. a) Arătați că $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, oricare ar fi numerele reale a și b.

b) Determinați numerele reale $x, y \geq 0$ astfel încât $\begin{cases} [x]^2 + \{y\}^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ [y]^2 + \{x\}^2 \leq \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \end{cases}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real a.

3. Numerele reale nenule a, b, c şi d au module diferite şi verifică relaţia $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$.

a) Arătaţi că $\frac{a+b}{a(c+d)} + \frac{a+c}{a(b+d)} + \frac{a+d}{a(b+c)} + \frac{b^2+c^2+d^2}{bcd} = 0$;

b) Pentru $a = 2$ şi $b = -3$, arătaţi că există $c, d \in \mathbb{Z}$ astfel încât numerele a, b, c şi d să verifice condiţiile din ipoteză.

4. Punctele S, Q și R sunt mijloacele muchiilor $[A'D']$, $[AB]$ și respectiv $[CC']$ ale cubului $[ABCDA'B'C'D']$ cu $AB = a$. Calculaţi distanţa de la punctul B la planul (SQR) .

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 3 ore efectiv.